Математика и механика. Физика

УДК 514.76

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, А.С. Пшеничникова, В.К. Барышева

Томский политехнический университет
E-mail: AnkaBee@mail.ru

Изучаются отображения двумерных площадок m-плоскостей и нормальных (n–m)-плоскостей распределения $\Delta^1_{n,m}$ в E_n, определяемые двумя соответствующими функциями двух аргументов, которые удовлетворяют условиям Коши-Римана.

Введение

Как известно [1], распределение на дифференцируемом многообразии M_p представляет собой один из существенных разделов дифференциально-геометрических структур. Одной из основных проблем распределения линейных m-мерных подпространств (m-плоскостей) L_m в n-мерном однородном пространстве является проблема инвариантного оснащения. В n-мерном эвклидовом пространстве E_n эта проблема становится тривиальной, поскольку с каждой m-плоскостью L_m ассоциируется оснащающая (нормальная) $(n-m)$-плоскость $P_{n-m}\perp L_m$. Поэтому возникает проблема достаточно полного привлечения геометрических свойств полей пар соответствующих линейных подпространств L_m и P_{n-m} в E_n.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–6].

Данная статья посвящена изучению распределения $\Delta^1_{n-m}:M\to L_m$ m-плоскостей L_m в E_n ($m>2$, $(n-m)>2$), где $M\in E_n$. Каждой точке $M\in E_n$ сопоставляются двумерные плоскости $L^1_2\subset L_m$ и $P^1_2\subset L_m$, проходящие через точку A. Особое внимание уделяется отображениям плоскостей L^1_2 и P^1_2.

Первый пункт посвящен аналитическому аппарату, который применяется во всех остальных пунктах при изучении распределения $\Delta^1_{n,m}:M\to L_m$. В пункте 2 изучаются отображения $F_t:L^1_2\to P^1_2$ и $\tilde{F}_t:P^1_2\to L^1_2$ при каждом фиксированном направления t, которые определяются соответствующими двумя функциями двух аргументов. В пункте 3 рассматриваются случаи, когда отображения F_t и $\tilde{F}_t$ являются аналитическими, т. е. определяющие их функции удовлетворяют условиям Коши-Римана [4. С. 188–189]. В этом же пункте рассматриваются случаи взаимосвязей между числами m и n, когда поля двумерных плоскостей $L^1_2\subset L_m$ и $P^1_2\subset L_m$ определяются инвариантным образом в предположении, что отображения F_t и $\tilde{F}_t$ являются аналитическими.

Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

Результаты, изложенные в пунктах 1–3 для общего распределения $\Delta^1_{n,m}$ в E_n ($m>2$, $(n-m)>2$), принадлежат Е.Т. Ивлеву, в пункте 3.2 при $n=6$, $n=m+4$ и $m=4$ принадлежат А.С. Пшеничниковой, при $n\leq7$ – В.К. Барышевой.

1. Аналитический аппарат

1.1. Распределение $\Delta^1_{n,m}$

Рассматривается n-мерное эвклидово пространство E_n, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\bar{A},\bar{e}_i\}$, $(i,j,k,l=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i,\qquad d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j,$$
$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,\tag{1}$$

где 1-формы ω_i^k удовлетворяют соотношениям:

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\tag{2}$$

вытекающим из условий ортонормальности репера R:

$$\langle\bar{e}_i;\bar{e}_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}0,\ i\neq j;\\1,\ i=j.\end{cases}\tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем символом $\langle\bar{x};\bar{y}\rangle$ обозначается скалярное произведение векторов $\bar{x},\bar{y}\in E_n$.

В пространстве E_n зададим распределение

$$\Delta^1_{n,m}:M\to L_m,\tag{4}$$

где M – текущая точка пространства E_n, принадлежащая соответствующей m-плоскости L_m.

К распределению (4) присоединим ортонормальный репер $R=\{\overline{A},\overline{e_i}\}$ так, чтобы

$$M = A, \quad L_m = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_m). \qquad (5)$$

Здесь символом $L_p=(\overline{B},\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_p)$ обозначается p-мерная плоскость в $L_p\subset E_n$, проходящая через точку $B\in E_n$ параллельно линейно независимым векторам $\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_p$ эвклидова пространства E_n. Из (5) в силу (1) следует, что распределение (4) определяется дифференциальными уравнениями:

$$\omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha i}^{\hat{\alpha}}\omega^i, \quad (\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m}; \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n}), \qquad (6)$$

где компоненты $A^{\hat{\alpha}}_{\alpha i}$ внутреннего фундаментального геометрического объекта

$$\Gamma = \{A_{\alpha i}^{\hat{\alpha}}\} \qquad (7)$$

первого порядка распределения $\Delta^1_{n,m}$ в смысле Г.Ф. Лапласа [2] удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla A_{\alpha i}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha ij}^{\hat{\alpha}}\omega^j, \quad A_{\alpha[ij]}^{\hat{\alpha}} = 0. \qquad (8)$$

Здесь и в дальнейшем оператор ∇ означает следующее:

$$\nabla H^a_{a_1a_2} = dH^b_{a_1a_2}\omega^a_b - H^a_{b_1a_2}\omega^{b_1}_{a_1} - H^a_{a_1b_2}\omega^{b_2}_{a_2},$$

$$\left(\begin{array}{c} a,b,c\in G,\ a_1b_1c_1\in G_1,\ a_2b_2c_2\in G_2,\ G,G_1,G_2\subset N, \\ N - \text{множество положительных натуральных чисел} \end{array}\right). \qquad (9)$$

Из (5) и (1) в силу (3) следует, что в каждой точке $A\in E_n$ определяется $(n-m)$-плоскость

$$P_{n-m} = (\overline{A}, \overline{e}_{m+1}, \overline{e}_{m+2}, ..., \overline{e}_n) \perp L_m. \qquad (10)$$

С этой $(n-m)$-плоскостью ассоциируется распределение

$$\Delta^2_{n,n-m} : A \to P_{n-m}.$$

Из (2) и (6) получаем

$$\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha} = A_{\hat{\alpha} i}^{\alpha}\omega^i = -\omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}} \Rightarrow A_{\alpha i}^{\hat{\alpha}} = -A_{\hat{\alpha} i}^{\alpha}. \qquad (11)$$

Заметим с учетом (5) и (10), что в локальных координатах x^i репера R линейные подпространства L_m и P_{n-m} определяются уравнениями, соответственно:

$$L_m \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}} = 0; \quad P_{n-m} \Leftrightarrow x^{\alpha} = 0. \qquad (12)$$

1.2. Поля двумерных плоскостей $L^1_2\subset L_m$ и $P^1_2\subset P_{n-m}$, проходящих через соответствующие точки $A\in E_n$

На пространстве E_n как на дифференцируемом многообразии зададим поля геометрических объектов

$$g_1 = \{g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}\}, \quad g_2 = \{g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}\}, \quad \mathrm{Rang}[g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}] = \mathrm{Rang}[g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}] = 2,$$

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_1,\beta_1,\gamma_1 = 1,2; \hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\gamma}_1 = \overline{3,m}; \\ \alpha_2,\beta_2,\gamma_2 = m+1,m+2; \hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2,\hat{\gamma}_2 = \overline{m+3,n} \end{array}\right), \qquad (13)$$

компоненты которых удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + \omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_1}\omega^i, \quad \nabla g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} + \omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = g_{\alpha_2 i}^{\hat{\alpha}_2}\omega^i. \qquad (14)$$

Из (5) и (10) с учетом (12)–(14) следует, что в каждой точке $A\in E_n$ геометрические объекты g_1 и g_2 определяют ортогональные двумерные плоскости $L^1_2\subset L_m$ и $P^1_2\subset P_{n-m}$, проходящие через точку A:

$$L^1_2 = (\overline{A}, \overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}x^{\alpha_1}, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0;$$

$$P^1_2 = (\overline{A}, \overline{\varepsilon}_{m+1}, \overline{\varepsilon}_{m+2}) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_2} = g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}x^{\alpha_2}, \quad x^{\alpha} = 0. \qquad (15)$$

Здесь соответствующие линейно независимые векторы $\overline{\varepsilon}_{\alpha_1}$ и $\overline{\varepsilon}_{\alpha_2}$ определяются по формулам:

$$\overline{\varepsilon}_{\alpha_1} = \overline{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}\overline{e}_{\hat{\alpha}_1}, \quad \overline{\varepsilon}_{\alpha_2} = \overline{e}_{\alpha_2} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}\overline{e}_{\hat{\alpha}_2}. \qquad (16)$$

Замечание 1.1. Из (15) в силу (13), (10), (5) и (3) замечаем, что в каждой точке $A\in E_n$ определяются перпендикулярные линейные подпространства $L^2_{m-2}\subset L_m(L^1_2\perp L^2_{m-2})$ и $P^2_{n-m-2}\subset P_{n-m}(P^1_2\perp P^2_{n-m-2})$, проходящие через точку A:

$$L^2_{m-2} = (\overline{A}, \overline{\varepsilon}_3, ..., \overline{\varepsilon}_m) \Leftrightarrow x^{\alpha_1} = g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_1}x^{\hat{\alpha}_1}, x^{\hat{\alpha}} = 0;$$

$$P^2_{n-m-2} = (\overline{A}, \overline{\varepsilon}_{m+3}, ..., \overline{\varepsilon}_n) \Leftrightarrow x^{\alpha_2} = g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}x^{\hat{\alpha}_2}, x^{\alpha} = 0, \qquad (17)$$

где

$$\overline{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_1} = \overline{e}_{\hat{\alpha}_1} + g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}\overline{e}_{\alpha_1}, \quad \overline{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_2} = \overline{e}_{\hat{\alpha}_2} + g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}\overline{e}_{\alpha_2}, \qquad (18)$$

причем

$$g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1} = -g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}, \quad g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2} = -g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}. \qquad (19)$$

2. Отображения плоскостей L^1_2 и P^1_2

2.1. Поля некоторых геометрических объектов

С помощью компонент геометрических объектов (7) и (13) точке $A\in E_n$ поставим в соответствие следующие величины:

$$g_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}}, \quad g_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha} = A_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}A_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha};$$

$$G_{\alpha_1 i}^{\alpha_2} = g_{\alpha_1 i}^{\alpha_2} + g_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_2}g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}, \quad G_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha_1} = g_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha_1} + g_{\hat{\alpha}_2 i}^{\hat{\alpha}_1}g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}, \qquad (20)$$

которые в силу (11), (8), (9), (13), (14) и (19) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla g_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}} + A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}}\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}A_{\beta_1 i}^{\hat{\alpha}}\omega_{\hat{\alpha}_1}^{\beta_1} = g_{\alpha_1 ij}^{\hat{\alpha}}\omega^j,$$

$$\nabla g_{\alpha_2 i}^{\alpha} + A_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha}\omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}A_{\beta_2 i}^{\alpha}\omega_{\hat{\alpha}_2}^{\beta_2} = g_{\alpha_2 ij}^{\alpha}\omega^j,$$

$$\nabla G_{\alpha_1 i}^{\alpha_2} + g_{\hat{\alpha}_1 i}^{\alpha_2}\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}g_{\beta_1 i}^{\alpha_2}\omega_{\hat{\alpha}_1}^{\beta_1} = G_{\alpha_1 ij}^{\alpha_2}\omega^j,$$

$$\nabla G_{\alpha_2 i}^{\alpha_1} + g_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}g_{\beta_2 i}^{\alpha_1}\omega_{\hat{\alpha}_2}^{\beta_2} = G_{\alpha_2 ij}^{\alpha_1}\omega^j. \qquad (21)$$

Здесь

$$g_{\hat{\alpha}_1 i}^{\alpha_2} = A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\alpha_2} + g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}A_{\alpha_1 i}^{\alpha_2}, \quad g_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha_1} = A_{\hat{\alpha}_2 i}^{\alpha_1} + g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}A_{\alpha_2 i}^{\alpha_1},$$

причем явный вид величин, стоящих при ω^j, для нас несущественный.

Из (20), (21), (8) и (7) замечаем, что на многообразии E_n определены поля следующих геометрических объектов в смысле Г.Ф. Лаптева [2]:

$$\overset{*}{g}_1 = \{A_{\alpha i}^{\hat{\alpha}}, g_1\}, \quad \overset{*}{g}_2 = \{A_{\hat{\alpha} i}^{\alpha}, g_2\},$$

$$\overset{*}{G}_1 = \Gamma_1 \cup \overset{*}{g}_1, \quad \overset{*}{G}_2 = \Gamma_1 \cup \overset{*}{g}_2. \qquad (22)$$

В следующем пункте будут изучаться отображения плоскостей L_2^1 и P_2^1, которые ассоциируются с полями геометрических объектов (22).

2.2. Отображения F_t:$L_2^1 \to P_2^1$ и $\tilde{F}_t$:$L_2^1 \to P_2^1$

Рассматривается кривая $k(t)$, проходящая через точку $A \in E_n$, определяемая параметрическими дифференциальными уравнениями:

$$k(t): \quad \omega^i = t^i \theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_1, \tag{23}$$

где величины t^i при фиксированных главных параметрах, т. е. при ω^i=0, удовлетворяют условиям:

$$\delta t^i + \pi^i_j t^j = \overset{0}{\theta}_1 t^i.$$

Здесь $\pi^j_i = \omega^j_i|_{\omega^j=0}$, δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам [2], [3], причем $\overset{0}{\theta}_1 = \theta_1|_{\omega^j=0}$

Из (1) в силу (23) замечаем, что прямая

$$t = (\overline{A}, \overline{t}), \quad \overline{t} = t^i \overline{e}_i \tag{24}$$

с направляющим вектором $\overline{t}$, проходящая через точку A, является касательной к кривой $k(t)$ в точке A. В дальнейшем в соответствии с (23) и (24) будем считать, что смещение по кривой $k(t)$ равносильно смещению в направлении t.

Точке $A \in E_n$ сопоставим точки $X \in L_2^1 \subset L_m$ и $Y \in P_2^1 \subset P_{n-m}$ с радиус-векторами:

$$\overline{X} = \overline{A} + x^{\alpha_1} \overline{\varepsilon}_{\alpha_1}, \quad \overline{Y} = \overline{A} + x^{\alpha_2} \overline{\varepsilon}_{\alpha_2}. \tag{25}$$

Из (23)–(25) с учетом (1), (15), (16) и (12) получаем:

$$\frac{d\overline{X}}{\theta} = (...)^{\alpha} \overline{e}_{\alpha} + t^i (\delta_i^{\hat{\alpha}} + g^{\hat{\alpha}}_{\alpha_1 i} x^{\alpha_1}) \overline{e}_{\hat{\alpha}},$$

$$\frac{d\overline{Y}}{\theta} = (...)^{\hat{\alpha}} \overline{e}_{\hat{\alpha}} + t^i (\delta_i^{\alpha} + g^{\alpha}_{\alpha_2 i} y^{\alpha_2}) \overline{e}_{\alpha}. \tag{26}$$

Здесь символом (...) обозначаются несущественные величины.

Из (26) с учетом (20), (5), (10), (12), (15)–(19) замечаем, что в каждой точке $A \in E_n$ определены следующие отображения:

$$F_t : L_2^1 \to P_2^1 \Leftrightarrow y^{\alpha_2} = (G^{\alpha_2}_{\alpha_1 i} x^{\alpha_1} + \delta_i^{\alpha_2}) t^i,$$

$$\tilde{F}_t : P_2^1 \to L_2^1 \Leftrightarrow x^{\alpha_1} = (G^{\alpha_1}_{\alpha_2 i} y^{\alpha_2} + \delta_i^{\alpha_1}) t^i, \tag{27}$$

отвечающие направлению (24). Геометрически каждое из отображений (27) характеризуется следующим образом:

$$Y = F_t X = \{T(X)_t \cup L_m \cup P^2_{n-m-2}\} \cap P_2^1,$$

$$X = \tilde{F}_t Y = \{T(Y)_t \cup P_{n-m} \cup L^2_{m-2}\} \cap L_2^1. \tag{28}$$

Здесь символом $T(Z)_t$ обозначается касательная к линии $(Z)_t$, описываемой точкой Z вдоль кривой (23) или вдоль направления (24). Заметим, что в (28) предполагается, что точки $X \in L_2^1 \subset L_m$ и $Y \in P_2^1 \subset P_{n-m}$ не являются фокусами линейных подпространств L_m и P_{n-m} вдоль кривой $k(t)$ в смысле [5].

3. Аналитические отображения плоскостей $L_2^1 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$

3.1. Отображения F_{ta} и $\tilde{F}_{ta}$

Пусть каждой точке $A \in E_n$ отвечает отображение:

$$\psi : L_2^1 \to P_2^1 \Leftrightarrow y^{\alpha_2} = \psi^{\alpha_2}(x^1; x^2), \tag{29}$$

где функции $\psi^{\alpha_2}(x^1;x^2)$ непрерывно дифференцируемы по крайней мере дважды на плоскости L_2^1.

Определение 3.1. Отображение ψ:$L_2^1 \to P_2^1$ называется аналитическим и обозначается ψ_a, т. е. $\psi \to \psi_a$, если определяющие его функции (29) удовлетворяют условиям Коши-Римана [4. С. 188–189] на плоскости L_2^1:

$$\frac{\partial \psi^{m+1}(M)}{\partial x^1} = \frac{\partial \psi^{m+2}(M)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \psi^{m+2}(M)}{\partial x^1} = -\frac{\partial \psi^{m+1}(M)}{\partial x^2}, \tag{30}$$

$$M(x^1; x^2) \in L_2^1.$$

Из (27) замечаем, что при каждом фиксированном направлении $t = (\overline{A}, \overline{e}_i) t^i$ каждое отображение (27) определяется двумя соответствующими функциями двух аргументов. Поэтому в соответствии с определением 3.1 из (30) и (27) получаем, что

$$F_t \to F_{ta} : L_2^1 \to P_2^1 \Leftrightarrow \begin{cases} (G^{m+1}_{1i} - G^{m+2}_{2i}) t^i = 0; \\ (G^{m+1}_{2i} + G^{m+2}_{1i}) t^i = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{F}_t \to \tilde{F}_{ta} : P_2^1 \to L_2^1 \Leftrightarrow \begin{cases} (G^1_{m+1,i} - G^2_{m+2,i}) t^i = 0; \\ (G^1_{m+2,i} + G^2_{m+1,i}) t^i = 0, \end{cases} \tag{31}$$

(t^i – фиксировано).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.1. Отображение F_t:$L_2^1 \to P_2^1$ отвечающее точке $A \in E_n$, будет отображением F_{ta} при каждом фиксированном $t \in E_n$ тогда и только тогда, когда отображение $\tilde{F}_t$:$L_2^1 \to P_2^1$ будет отображением $\tilde{F}_{ta}$.

Доказательство этой теоремы вытекает с учетом (31), (11), (19) и (20) из того, что

$$G^{m+1}_{1i} - G^{m+2}_{2i} = -G^1_{m+1,i} + G^2_{m+2,i},$$

$$G^{m+1}_{2i} + G^{m+2}_{1i} = -G^1_{m+2,i} - G^2_{m+1,i}. \tag{32}$$

Теорема 3.2. Каждой паре двумерных плоскостей $L_2^1 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$ в точке $A \in E_n$ в общем случае, т. е. в случае, когда ранг матрицы

$$G = \begin{vmatrix} G^{m+1}_{11} - G^{m+2}_{21} & \ldots & G^{m+1}_{1n} - G^{m+2}_{2n} \\ G^{m+2}_{11} + G^{m+1}_{21} & \ldots & G^{m+2}_{1n} + G^{m+1}_{2n} \end{vmatrix} \tag{33}$$

в точке A равен 2, отвечает (n–2)-плоскость

$$\Gamma_{n-2} = (t \in E_n \,|\, F_t \to F_{ta} \Leftrightarrow \tilde{F}_t \to \tilde{F}_{ta}),$$

проходящая через точку A.

Доказательство этой теоремы вытекает из (31) с учетом теоремы 3.1 и соотношений (32).

Замечание 3.1. С учетом (31) и (32) и теоремы 3.1 $(n-2)$-плоскость (33) фактически определяется в локальных координатах ортонормального репера R уравнениями:

$$\varGamma_{n-2} \Leftrightarrow \begin{cases} (G_{1i}^{m+1} - G_{2i}^{m+2})t^i = 0; \\ (G_{2i}^{m+1} + G_{1i}^{m+2})t^i = 0. \end{cases} \qquad (34)$$

3.2. Существование двумерных плоскостей $L_2^1 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$ в общем случае при определенных значениях m и n, когда $F_t \to F_{ta} \Leftrightarrow \widetilde{F}_t \to \widetilde{F}_{ta}$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.3. Каждой точке $A \in E_n$ в общем случае отвечает при $n<7$ – бесчисленное и при $n=7$ – конечное число соответствующих пар плоскостей $L_2^1 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$ таких, что

$$F_t \to F_{ta} \qquad (35)$$

при всех направлениях t, принадлежащих некоторой гиперплоскости $\varGamma_{n-1}$.

Доказательство. Из (15) следует, что в каждой точке $A \in E_n$ плоскости $L_2^1 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$ определяются компонентами геометрических объектов (13), число которых равно, соответственно:

$$L_2^1 : m_1 = 2(m-2); \quad P_2^1 : m_2 = 2(n-m-2). \qquad (36)$$

Из (34) следует, что плоскости L_2^1 и P_2^1, будут такими, о которых идет речь в теореме 3.3, тогда и только тогда, когда ранг матрицы (33) будет равен 1, т. е., когда с учетом (20) величины $g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_1}$ и $g_{\alpha_2}^{\widehat{\alpha}_2}$ удовлетворяют алгебраическим уравнениям:

$$V_b \equiv (G_{1n}^{m+2} + G_{2n}^{m+1})(G_{1b}^{m+1} - G_{2b}^{m+2}) -$$
$$-(G_{1b}^{m+2} + G_{2b}^{m+1})(G_{1n}^{m+1} - G_{2n}^{m+2}) = 0, \qquad (37)$$
$$(b = \overline{1, n-1}).$$

Из (36) следует, что неизвестные $g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_1}$ и $g_{\alpha_2}^{\widehat{\alpha}_2}$, число которых равно

$$m_1 + m_2 = 2(n-4),$$

удовлетворяют $n-1$ алгебраическим уравнениям (37) в каждой точке $A \in E_n$. Поэтому утверждение 1, о котором идет речь в настоящей теореме, справедливо.

Докажем справедливость утверждения 2.

Рассмотрим якобиеву матрицу системы (37):

$$\left[\frac{\partial V_b}{\partial g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_1}}; \quad \frac{\partial V_b}{\partial g_{\alpha_2}^{\widehat{\alpha}_2}} \right]$$
$$\left(\begin{matrix} n = 7; b = \overline{1,6}; \alpha_1, \beta_1 = 1,2; \widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1 = 3,4; \\ \alpha_2, \beta_2 = 5,6; \widehat{\alpha}_2, \widehat{\beta}_2 = 7 \end{matrix} \right). \qquad (38)$$

Подсчитаем ранг матрицы (38) при $g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_1}=0$, $g_{\alpha_2}^{\widehat{\alpha}_2}=0$. Из (38) и (37) в силу (19) и (20) замечаем, что матрица (38) имеет определитель (минор) шестого порядка

$$\det[P_{\tilde{b}b}]. \qquad (39)$$

Здесь индексы принимают значения:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \overline{1,6},$$

причем величины $P_{\tilde{b}b}$ определяются по формулам:

$$P_{1b}^7 = -A_{1b}^7 P_7 - A_{27}^7 Q_b + A_{2b}^7 Q_7 + A_{17}^7 P_b,$$
$$P_{2b}^7 = -A_{2b}^7 P_7 - A_{17}^7 Q_b + A_{1b}^7 Q_7 - A_{27}^7 P_b,$$
$$P_{\widehat{\alpha}_1 b}^5 = A_{\widehat{\alpha}_1 b}^5 P_7 + A_{\widehat{\alpha}_1 7}^6 Q_b - A_{\widehat{\alpha}_1 b}^6 Q_7 - A_{\widehat{\alpha}_1 7}^5 P_b,$$
$$P_{\widehat{\alpha}_1 b}^6 = -A_{\widehat{\alpha}_1 b}^6 P_7 + A_{\widehat{\alpha}_1 7}^5 Q_b - A_{\widehat{\alpha}_1 b}^5 Q_7 + A_{\widehat{\alpha}_1 7}^6 P_b,$$
$$P_i = A_{1i}^6 + A_{2i}^5, \quad Q_i = A_{1i}^5 - A_{2i}^6 \qquad (40)$$
$$(b = \overline{1,6}; \quad \widehat{\alpha}_1 = 3,4; \quad i = \overline{1,7}).$$

Из (40) следует, что определитель (39) в общем случае в точке $A \in E_7$ не равен нулю. Это означает, что ранг матрицы (38) в общем случае равен 6. Поэтому система (37) состоит из 6 алгебраических уравнений, а потому имеет конечное число решений относительно $g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_1}$ и $g_{\alpha_2}^7$.

Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.4. Каждой заданной в точке A плоскости $L_2^1 \in L_m$ при $n=6$ отвечает одна плоскость P_2^1 такая, что имеет место (35) при $\forall t \in L_2^1$.

Доказательство. Возможны три случая при $n=6$.

1. ***m*=2, *n*=6.**

В этом случае в соответствии с (5), (10), (13) и (15) имеем

$$L_2^1 = L_2 = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2) \Rightarrow g_{\widehat{\alpha}_1}^{\alpha_1} = g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_1} = 0, \quad x^{\widehat{\alpha}} = 0,$$
$$P_2^1 \subset P_4 = (\overline{A}, \overline{e}_3, \overline{e}_4, \overline{e}_5, \overline{e}_6),$$
$$P_2^1 \Leftrightarrow x^{\widehat{\alpha}_2} = g_{\alpha_2}^{\widehat{\alpha}_2} x^{\alpha_2}, \quad x^{\alpha} = 0,$$
$$(\alpha_2 = 3,4; \widehat{\alpha}_2 = 5,6).$$

Поэтому соотношение (35), $\forall t \in L_2^1$ будет с учетом (34) выполняться тогда и только тогда, когда величины $g_{\alpha_2}^{\widehat{\alpha}_2} = -g_{\widehat{\alpha}_2}^{\alpha_2}$, число которых равно 4, удовлетворяют следующей системе 4 линейных в общем случае неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} g_{\widehat{\alpha}_2}^3 A_{1\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_2} - g_{\widehat{\alpha}_2}^4 A_{2\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_2} = A_{2\alpha_1}^4 - A_{1\alpha_1}^3; \\ g_{\widehat{\alpha}_2}^3 A_{2\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_2} + g_{\widehat{\alpha}_2}^4 A_{1\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_2} = -A_{1\alpha_1}^4 - A_{2\alpha_1}^3 \end{cases} \qquad (41)$$
$$(\alpha_1 = 1,2; \widehat{\alpha}_2 = 5,6).$$

Можно показать, что основной определитель четвертого порядка системы (41) в точке A не равен нулю тождественно. Поэтому система (41) в общем случае в точке A допускает единственное решение относительно $g_{\alpha_2}^{\widehat{\alpha}_2}$.

2. ***m*=3, *n*=6.**

В этом случае индексы принимают следующие значения:

$$\alpha_1, \beta_1 = 1,2; \widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1 = 3; \alpha_2, \beta_2 = 4,5;$$
$$\widehat{\alpha}_2, \widehat{\beta}_2 = 6; i = \overline{1,6}; \alpha, \beta = 1,2; \widehat{\alpha}, \widehat{\beta} = 4,5,6,$$

причем

$$L_2^1 \Leftrightarrow x^{\alpha_2} = g_{\widehat{\alpha}}^3 x^{\widehat{\alpha}}, \quad x^{\widehat{\alpha}} = 0,$$
$$P_2^1 \Leftrightarrow x^6 = g_{\alpha_2}^6 x^{\alpha_2}, \quad x^{\alpha} = 0; \quad L_2^1 = (\overline{A}, \overline{e}_3),$$
$$L_3 = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) \Leftrightarrow x^{\widehat{\alpha}} = 0,$$
$$P_3 = (\overline{A}, \overline{e}_4, \overline{e}_5, \overline{e}_6) \Leftrightarrow x^{\alpha} = 0. \qquad (42)$$

Будем считать в точке $A \in E_6$ плоскость L_2^1 заданной. Проведем в соответствии с (42) такую канонизацию репера R, при которой

$$L_2^1 = (\overline{A}, \overline{e}_1, \overline{e}_2) \Leftrightarrow x^3 = 0, x^{\hat{\alpha}} = 0 \Leftrightarrow g_{\alpha_1}^3 = -g_3^{\alpha_1} = 0, \quad (43)$$

что в силу (14) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\omega_{\alpha_1}^3 = -\omega_3^{\alpha_1} = A_{\alpha_1 i}^3 \omega^i.$$

Это означает, что указанная фиксация репера R существует в соответствии с [6].

Из (34) с учетом (43) и (20) заключаем, что (35), $t=(\overline{A},\overline{e_3})$, $(x^{\alpha_1}=0, x^{\hat{\alpha}}=0)$ имеет место тогда и только тогда, когда две величины $g_6^{\alpha_2}=-g_{\alpha_2}^6$ удовлетворяют следующим двум в общем случае линейным неоднородным уравнениям:

$$\begin{cases} g_6^4 A_{13}^6 - g_6^5 A_{23}^6 = A_{23}^5 - A_{13}^4; \\ g_6^4 A_{23}^6 + g_6^5 A_{13}^6 = -A_{23}^4 - A_{13}^5. \end{cases} \quad (44)$$

Основной определитель второго порядка этой системы, как легко видеть, не равен тождественно нулю в точке A. Поэтому система (44) имеет единственное решение относительно g_6^4 и g_6^5.

3. **m=4, n=6.**

В этом случае

$$P_2^1 = P_{6-4} = P_2 = (\overline{A}, \overline{e}_5, \overline{e}_6) \Leftrightarrow g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = -g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2} = 0.$$

При этом плоскость P_2^1 считается заданной, а плоскость L_2^1 – определяемой. Следовательно, случай 3 формально такой же, как и случай 1.

Теорема 3.4 доказана.

Теорема 3.5. Каждой точке $A \in E_n$ при $n=m+4$ {при $m=4$} в общем случае отвечает конечное число соответствующих плоскостей $L_2^1 \subset L_m$ $\{P_2^1 \subset P_{n-m}\}$ таких, что имеет место (35) при $\forall t \in L_m$ $\{\forall t \in P_{n-m}\}$.

Доказательство. Из (34) с учетом (36), (5), (10), (12) и (15) следует, что (35) имеет место при $\forall t \in L_m \Leftrightarrow t^{\hat{\alpha}}=0$ $\{\forall t \in P_{n-m} \Leftrightarrow t^{\alpha}=0\}$ тогда и только тогда, когда величины $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}=-g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}$ и $g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}=-g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}$ удовлетворяют следующим в общем случае нелинейным алгебраическим уравнениям:

$$\begin{cases} \varphi_c \equiv G_{1c}^{m+1} - G_{2c}^{m+2} = 0; \\ \psi_c \equiv G_{1c}^{m+2} + G_{2c}^{m+1} = 0, \end{cases} \quad (45)$$

$$(c = \overline{1,m} \Leftarrow \forall t \in L_m;\ c = \overline{m+1,n} \Leftarrow \forall t \in P_{n-m}).$$

Здесь величины $G_{\alpha_i}^{\hat{\alpha}}$ определяются по формулам (20).

Из (34) и (36) заключаем, что каждая система (45) содержит одинаковое число $m_1+m_2=2(n-4)$ неизвестных $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}$ и $g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}$ и уравнений в следующих соответствующих случаях:

$$\forall t \in L_m (t^{\hat{\alpha}} = 0) \Rightarrow n = m + 4 \text{ и } c = \overline{1,m},$$

$$\forall t \in P_{n-m} (t^{\alpha} = 0) \Rightarrow m = 4 \text{ и } c = \overline{m+1,n}.$$

Рассматривается якобиева матрица системы (45)

$$\left[\frac{\partial \varphi_c}{\partial g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}};\ \frac{\partial \varphi_c}{\partial g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}};\ \frac{\partial \psi_c}{\partial g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}};\ \frac{\partial \psi_c}{\partial g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}} \right]. \quad (46)$$

Подсчитывая ранг матрицы (46), например, при $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}=-g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}=0$, $g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}=-g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}=0$, убеждаемся в том, что матрица (46) имеет следующие ненулевые миноры в соответствующих случаях:

1) $n=m+4$.

$$\det\begin{bmatrix} -A_{2\alpha}^{m+3} & -A_{2\alpha}^{m+4} & A_{1\alpha}^{m+3} & A_{1\alpha}^{m+4} & A_{3\alpha}^{m+2} & \ldots & A_{m\alpha}^{m+2} & A_{3\alpha}^{m+1} & \ldots & A_{m\alpha}^{m+1} \\ A_{1\beta}^{m+3} & A_{1\beta}^{m+4} & A_{2\beta}^{m+3} & A_{2\beta}^{m+4} & A_{3\beta}^{m+1} & \ldots & A_{m\beta}^{m+1} & A_{3\beta}^{m+2} & \ldots & A_{m\beta}^{m+2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha = \overline{1,m} - \text{номера первых } m \text{ строк;} \\ \beta = \overline{1,m} - \text{номера следующих } m \text{ строк} \end{pmatrix}.$$

2) $m=4$.

$$\det\begin{bmatrix} -A_{m+2,\hat{\alpha}}^3 & -A_{m+2,\hat{\alpha}}^4 & A_{m+1,\hat{\alpha}}^3 & A_{m+1,\hat{\alpha}}^4 & A_{m+3,\hat{\alpha}}^2 & \ldots & A_{n-m,\hat{\alpha}}^2 & A_{m+3,\hat{\alpha}}^1 & \ldots & A_{n-m,\hat{\alpha}}^1 \\ A_{m+1,\hat{\beta}}^3 & A_{m+1,\hat{\beta}}^4 & A_{m+2,\hat{\beta}}^3 & A_{m+2,\hat{\beta}}^4 & A_{m+3,\hat{\beta}}^1 & \ldots & A_{n-m,\hat{\beta}}^1 & A_{m+3,\hat{\beta}}^2 & \ldots & A_{n-m,\hat{\beta}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{\gamma\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} = -A_{\hat{\gamma}\hat{\beta}}^{\gamma};\ \hat{\alpha} = \overline{m+1,n} - \text{номера первых } n-m \text{ строк;} \\ \hat{\beta} = \overline{m+1,n} - \text{номера следующих } n-m \text{ строк} \end{pmatrix}.$$

Поскольку в случае 1) {2)} минор порядка $2m$ $\{2(n-m)\}$ в общем случае в точке A не равен нулю тождественно, то ранг матрицы (46) в соответствующем случае равен $2m$ $\{2(n-m)\}$. Это означает, что система (46) в каждом случае состоит из алгебраически независимых уравнений, а потому допускает конечное число решений относительно $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}$ и $g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}$.

Теорема 3.5 доказана.

Замечание 3.2. Объединение случаев $n=m+4$ и $m=4$ теоремы 3.5 приводит к случаю $m=4$; $n=8$, т. е. к распределению $\Delta_{8,4}^1$ в E_8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциальные геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТП, 1948. – 432 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1958. – 678 с.
5. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
6. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

Поступила 21.12.2006 г.